

УДК 532.543

**В. А. Юров, А. А. Юрова**

**ИНЕРЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ВПАДЕНИЯ  
ПРЕСНЫХ ВОД ВИСЛИНСКОГО ЗАЛИВА В БАЛТИЙСКОЕ МОРЕ**

51

*Построена математическая модель механизма возникновения антисимметричных вихрей при впадении пресных вод в морскую, наблюдающихся, в частности, на выходе из Балтийского канала, соединяющего Вислинский залив с Балтийским морем. Показано, что основной причиной вихреобразования в этом случае является сила Кориолиса. Также аналитически вычислена точная зависимость циркуляции скорости от времени для трех простейших видов «языка» интрузии пресных вод.*

*A mathematical model of the mechanism of anti-symmetric vortex at the confluence of fresh water to sea water, observed, in particular, the output of the Baltic Canal connecting Visla Lagoon to the Baltic Sea is constructed. It is shown in particular that the main reason the vortex formation in this case is the Coriolis force. Also analytically calculate the exact dependence of circulation rates from time to time for the three simplest forms of "language" of the intrusion of fresh water.*

**Ключевые слова:** впадение пресных вод, сила Кориолиса, интрузии пресных вод.

**Key words:** the confluence of fresh water, the Coriolis force, the intrusion of fresh water.

Одним из наиболее примечательных результатов численного моделирования процесса перемешивания двух водных масс, обладающих различными характеристиками (такими как плотность, соленость, температура и т. п.), следует считать описание процесса впадения языка пресной воды в большой по объему резервуар соленой воды [1–3]. В частности, данные модели единогласно предсказывают возникновение в процессе перемешивания двух несимметричных вихрей, каковой эффект находится в полном согласии с многочисленными натурными данными [4–7]. Цель данной статьи заключается в построении точной математической теории, описывающей данное явление и могущей быть использованной при установлении особенностей поведения водных масс в окрестности канала, соединяющего Балтийское море и Вислинский залив (рис. 1).

Одним из основных математических инструментов для изучения вихрей стала теорема Бьеркнеса, дающая необходимые и достаточные



условия для вихрепорождения [8]. К сожалению, данная теорема в классическом виде применима только для водных масс,двигающихся под действием консервативных сил. Однако же для корректного описания такой задачи, как моделирование процесса впадения вод Вислинского залива в Балтийское море, необходим учет такой неконсервативной силы, как сила Кориолиса. Таким образом, мы приходим к выводу о необходимости модификации теоремы Бьеркнеса для описываемой задачи с целью учета вращения Земли.

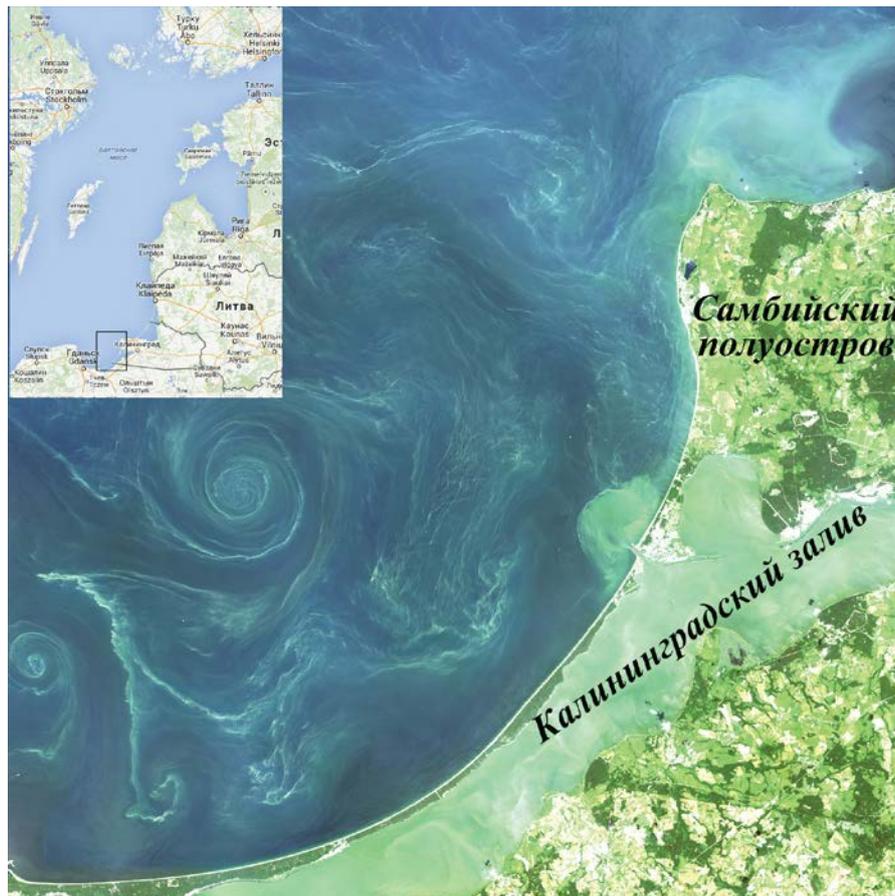


Рис. 1. Факел выноса вод из Калининградского (Вислинского) залива. Особое внимание обращаем на форму этого факела, однозначно свидетельствующую о наличии как минимум двух противоположно направленных вихрей. Снимок от 07.07.2014, выполнен при помощи Operational Land Imager со спутника дистанционного зондирования LandSat-8

Ключевую роль в наших рассуждениях будет играть понятие циркуляции скорости в среде. Определим ее следующим образом. Пусть  $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$  – векторное поле скоростей в заданном объеме жидко-



сти, и пусть  $L$  — некоторый простой гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в этом объеме. Тогда циркуляция скорости по контуру  $L$  определяется по формуле

$$\gamma \equiv \oint_L \vec{ds} \vec{v}. \quad (1)$$

Нас будет интересовать эволюция (1) со временем, то есть величина  $\frac{d\gamma}{dt}$ . Для вычисления этой производной введем новую переменную  $\mu$ , такую, чтобы контур интегрирования можно было представить в параметрическом виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(\mu, t), \quad \vec{ds} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu} d\mu.$$

Для определенности будем считать, что параметр  $\mu$  меняется в пределах  $[0, 2\pi]$ . Дифференцируя (1) по времени и учитывая, что  $t$  и  $\mu$  — независимые переменные, получаем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \oint_L \frac{d\vec{s}(d\vec{v})}{dt} + \int_0^{2\pi} \frac{d\mu \vec{v}(\partial^2 \vec{r})}{\partial t \partial \mu}. \quad (2)$$

Откуда следует:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \vec{ds} \vec{v} = \oint_L \frac{d\vec{s}(d\vec{v})}{dt}. \quad (3)$$

На следующем шаге нам понадобится уравнение движения жидкости, которое в пренебрежении эффектами вязкости имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F}, \quad (4)$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность, а  $\vec{F}$  — внешняя сила. Предположим для начала, что сила  $\vec{F}$  — консервативная, то есть существует такая скалярная функция  $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ , называемая потенциалом, что  $\vec{F} = \nabla \phi$ . При этом интеграл по контуру  $L$  от функции  $\vec{F}$  превращается в ноль, поскольку

$$\oint_L \vec{F} \vec{ds} = \oint_L \nabla \phi \vec{ds} = \oint_L d\phi = 0. \quad (5)$$

Приняв (5) во внимание, прямой подстановкой (4) в (3) получаем следующую формулу:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\oint_L \frac{\nabla p}{\rho} \vec{ds} = -\oint_L \frac{dp}{\rho} = -\oint_L \omega dp, \quad (6)$$

где  $\omega = \rho^{-1}$  — новая функция, имеющая смысл удельного объема жидкости. Отметим, что из формулы (6) немедленно вытекает, что в не-



сжимаемых жидкостях, для которых  $\rho = \text{const}$ , производная  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ , и завихренность оказывается величиной, не зависящей от времени. Аналогичный вывод можно сделать и для более общего класса баротропных жидкостей, то есть жидкостей, для которых  $p = p(\rho)$ , так как для таких жидкостей подинтегральное выражение в (6) тоже может быть представлено как градиент следующей скалярной функции:

$$\psi(\rho) = -\int \frac{dp(\rho)}{\rho},$$

54

а значит, интеграл по замкнутому контуру  $L$  в (6) равен нулю.

Предположим теперь, что исследуемая жидкостью не удовлетворяет условию баротропности. Пусть в некоторой точке пространства значения давления и удельного объема (то есть величины, обратной плотности) составляют соответственно  $p_0$  и  $\omega_0$ . Рассмотрим две изобарические поверхности, на одной из которых  $p = p_0 = \text{const}$ , а на другой  $p = p_0 + 1$  и две изостерические поверхности со значениями удельного объема  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = \omega_0 + 1$ . Пересечение этих четырех поверхностей образует так называемую *единичную изобаро-изостерическую трубку*. Несложно убедиться, что контурный интеграл (6) по такой трубке равен  $\pm 1$  в зависимости от выбранного направления обхода.

В зависимости от знака выделяют положительные и отрицательные единичные изобаро-изостерические трубки. Если при этом контур  $L$  выбран так, чтобы он включал целое число как изобарических, так и изостерических поверхностей, то (6) превращается в равенство:

$$\frac{d\gamma}{dt} = N_1 - N_2, \quad (7)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — общее число положительных и отрицательных трубок. Таким образом, мы приходим к выводу, что завихренность изменяется (в том числе и возникает) если изобарные и изостерические поверхности *не совпадают*. В этом и заключается суть теоремы Бьеркнеса.

При выводе формулы (7) мы использовали предположение о консервативности суммарной силы, действующей на жидкость. Это предположение вполне оправдано при описании движения невращающейся жидкости в гравитационном поле. Однако ситуация несколько осложняется как только мы вводим в рассмотрение факт *вращения Земли вокруг своей оси*. В этом случае система координат, связанная с фиксированной точкой земной поверхности, оказывается неинерциальной, что приводит к возникновению двух дополнительных неинерциальных сил: силы Кориолиса  $\bar{F}_c$  и центробежной силы  $\bar{F}_{ct}$ , имеющих следующий вид:



$$\begin{aligned}\bar{F}_c &= -2[\bar{\Omega}, \bar{v}], \\ \bar{F}_{ct} &= [\bar{\Omega}, [\bar{r}, \bar{\Omega}]],\end{aligned}$$

где  $\bar{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли, параллельный ее оси вращения и направленный от южного полюса к северному [9]. Отметим, что сила  $\bar{F}_{ct}$  всегда направлена от оси вращения и является консервативной силой. Это означает, что при учете вращения Земли уравнения движения (4) должны быть переписаны в виде

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2[\bar{\Omega}, \bar{v}] + \nabla U, \quad (8)$$

где  $U$  – эффективная потенциальная энергия, включающая центробежные эффекты. Повторяя наши предыдущие рассуждения для этого случая и принимая во внимание (8), мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{dg}{dt} = N_1 - N_2 - 2 \oint_L \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (9)$$

Таким образом, вращение Земли приводит к возникновению дополнительного слагаемого в уравнении для скорости изменения циркуляции скорости. Отметим, что подынтегральное выражение в (9) в неявном виде учитывает географическую широту  $\theta$ . Действительно, пусть в некоторой точке земной поверхности, лежащей на широте  $\theta$ , выбрана система координат, в которой (для определенности) ось  $\bar{x}$  направлена с востока на запад, ось  $\bar{y}$  – с севера на юг, а ось  $\bar{z}$  нормальна земной поверхности и направлена от нее. Тогда векторное произведение  $[\bar{\Omega}, \bar{v}]$  будет иметь вид

$$[\bar{\Omega}, \bar{v}] = -2|\bar{\Omega}|((v_z \cos \theta + v_y \sin \theta)\bar{i} - v_x \sin \theta \bar{j} - v_x \cos \theta \bar{k}), \quad (10)$$

Наконец в случае когда  $v_z = 0$  и контур  $L$  параллелен плоскости, формула (9) может быть упрощена и приведена к следующему виду:

$$\frac{d\gamma}{dt} = N_1 - N_2 - 2|\bar{\Omega}| \sin \theta \frac{dS}{dt}, \quad (11)$$

где  $S(t)$  – площадь, ограниченная контуром  $L$ .

Одним из примеров приложения формулы (11) является упомянутая в начале статьи задача о зарождении вихрей при впадении пресноводной реки в море. Как легко убедиться, в этом случае изобаро- и истерические поверхности с хорошей точностью совпадают, поэтому условия классической теоремы Бьеркнеса не выполняются. Причина, приводящая к реально наблюдаемому появлению вихрей, заключается



в учете вращения Земли, осуществляемом последним членом в (11). Дело здесь в том, что учет вязкости приводит к колоколообразному распределению скоростей в пресном потоке. Например, в изучаемых ниже примерах это распределение подчиняется линейному или параболическому закону. В любом случае скорость жидких частиц в центральной части потока больше, чем у частиц, находящихся вблизи границы раздела пресная-соленая вода, а потому испытывают различное влияние кориолисовой силы. Вследствии этого произвольный замкнутый контур, состоящий из некоторых фиксированных жидких частиц пресной воды, будет деформироваться с течением времени и менять свою площадь. Это приведет к «включению» кориолисова члена в (11), а значит, в конечном счете — к появлению двух вихрей.

Теперь перейдем к анализу конкретной модели, описывающей возникновение завихренности при впадении пресноводной реки в море. Для простоты всюду в дальнейших рассуждениях мы полагаем  $x$ -компоненту скорости равной нулю, и тем самым сводим задачу к плоскому случаю. Также, поскольку единственной силой, дающей вклад в (9) является кориолисова сила, для упрощения расчетов мы далее будем полагать остальные силы (силу гравитации, центробежную силу и др.) равными нулю. Помимо этого нами будут приняты следующие предположения:

1) в начальный момент времени распределение скоростей в реке симметрично относительно оси  $y$  выбранной посреди устья реки и имеет вид

$$\bar{v}_0 = \{0, v_0(x)\}; \quad (12)$$

2) изучается циркуляция по контуру, который при  $t = 0$  совпадает с квадратом  $\{(x, y) : x \in [0, L], y \in [0, L]\}$  со стороной  $L$ .

Будем рассматривать два варианта распределения скорости в формуле (12):

$$v_0(x) = a(L - x), \quad (13)$$

$$v_0(x) = a(L^2 - x^2), \quad (14)$$

где  $a$  — некоторый параметр, который должен выбираться в согласии с феноменологическими данными.

Рассмотрим жидкие частицы, на которые действует кориолисова сила. Согласно выражениям (8) и (10) уравнения их динамики имеют следующий вид:

$$\dot{u} = fv, \quad (15)$$

$$\dot{v} = -fu. \quad (16)$$

где  $u$  обозначает  $x$ -компоненту скорости,  $v$  — ее  $y$ -компоненту, параметр  $f = 2|\bar{\Omega}| \sin \theta$ , а точка означает полную производную по времени.



Сначала найдем решения уравнений (15) – (16) для общего случая:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_0, \\ v(x_0) &= v_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для этого оказывается удобным умножить (16) на  $i$ , сложить с (15) и ввести новую комплекснозначную функцию

$$\dot{\psi} = u + iv.$$

Функция  $\psi$  должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{\psi} = -if\psi.$$

Проинтегрировав его и разделив результат на действительную и мнимую части, приходим к системе

$$\begin{aligned} u &= c_1 \cos(\delta - ft), \\ v &= c_1 \sin(\delta - ft), \end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $\delta$  – константы интегрирования. Значения этих констант легко находятся из начальных условий (17), приводя к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} u &= \pm \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \cos\left(\arctg \frac{v_0}{u_0} - ft\right), \\ v &= \pm \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \sin\left(\arctg \frac{v_0}{u_0} - ft\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Систему (18) можно переписать в более простом виде, если ввести обозначения

$$V_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}, \quad \phi_0 = \arctg \frac{v_0}{u_0},$$

имеющие смысл соответственно модуля вектора скорости  $\vec{V}_0 = \{u_0, v_0\}$  и угла наклона этого вектора к оси абсцисс. С учетом этих обозначений, система (18) принимает вид

$$\begin{aligned} u &= \pm V_0 \cos(\phi_0 - ft), \\ v &= \pm V_0 \sin(\phi_0 - ft), \end{aligned}$$

Интегрируя ее, получаем окончательное решение:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \pm \frac{2V_0}{f} \cos(\phi_0 - ft) \sin\left(\frac{ft}{2}\right), \\ y &= y_0 \pm \frac{2V_0}{f} \sin(\phi_0 - ft) \sin\left(\frac{ft}{2}\right). \end{aligned} \quad (19)$$



Из уравнения (19) сразу же вытекает, что расстояние между телом в момент времени  $t$  и его начальным положением описывается следующим выражением:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{4V_0^2}{f^2} \sin^2 \left( \frac{ft}{2} \right).$$

Это означает, что изначально выбранный контур со временем претерпевает деформацию (описываемую формулами (19)). Отсюда, согласно модифицированной теореме Бьеркнеса (11), мы с необходимостью приходим к выполнению необходимого и достаточного условия вихреобразования.

58

Чтобы провести более строгий анализ, нам потребуется знать точный вид эволюции заданной кривой, такой, что при  $t = 0$

$$y_0 = y_0(x_0).$$

Для этого необходимо выразить  $x_0$  из первого уравнения системы (19) и подставить его во второе уравнение, что как раз и даст искомый закон:

$$y = y(x, t). \quad (20)$$

К сожалению, в явном виде такую процедуру можно осуществить лишь в исключительных случаях, при особо простом задании начального распределения скорости в (12), в частности при выборе (13) или (14). Как легко видеть, в этом случае  $V_0 = v_0$  и  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ , поэтому система (19) принимает вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2v_0(x_0)}{f} \sin^2 \frac{ft}{2}, \\ y &= y_0 + \frac{v_0(x_0)}{f} \sin ft. \end{aligned} \quad (21)$$

**Пример 1.** Линейная модель (13).

Подставляя выражение (13) в (20) и выбрав для простоты в (20) знак плюс, получаем

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2a(L - x_0)}{f} \sin^2 \frac{ft}{2}, \\ y &= y_0 + \frac{a(L - x_0)}{f} \sin ft. \end{aligned} \quad (22)$$

Откуда

$$x_0 = \frac{fx - 2aL \sin^2 \frac{ft}{2}}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}},$$

следовательно, эволюция контура (21) описывается следующей формулой:

$$y(x, t) = y_0 + \frac{a(L - x) \sin ft}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}}. \quad (23)$$



Рассмотрим движение частей изучаемого контура по отдельности.  
 $x_0 = 0$ ,  $y$  возрастает. Согласно (22):

$$\begin{aligned} x &= \frac{2aL}{f} \sin^2 \frac{ft}{2}, \\ y &= y_0 + \frac{aL}{f} \sin ft. \end{aligned} \quad (24)$$

Из выражения (24) следует, что исследуемый отрезок смещается, оставаясь параллельным оси ординат, поскольку координаты всех его точек одинаковы во все моменты времени.

Пусть  $y_0(x_0) = L$ ,  $x$  возрастает. Тогда из (23) получаем

$$y(x, t) = L + \frac{a(L-x) \sin ft}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}}. \quad (25)$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$k = -\frac{a \sin ft}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}}.$$

На отрезке  $x_0 = L$  имеем  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . Таким образом, отрезок ВС стоит на месте, что было, разумеется, заранее очевидно, поскольку в начальный момент времени скорость всех его точек была равна нулю, а значит, нулем было и кориолисово ускорение этих точек.

Наконец на последнем отрезке  $y_0(x_0) = 0$ , поэтому

$$y(x, t) = \frac{a(L-x) \sin ft}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}}. \quad (26)$$

Это уравнение прямой, параллельной (25) и смещенной вниз на величину  $L$ . Таким образом, в произвольный момент времени, контур, бывший первоначально квадратом со стороной  $L$ , превращается в параллелограмм. Тогда площадь  $S$  искомого параллелограмма определяется по формуле

$$S = \int_{\frac{2aL \sin^2 \frac{ft}{2}}{f}}^L dx (y_1 - y_2) = L^2 \left( 1 - \frac{2a}{f} \sin^2 \frac{ft}{2} \right).$$

Пусть в (11)  $N_1 = N_2$ . Интегрируя (11) один раз получаем

$$\gamma(t) = -fS(t) \sin \theta + C. \quad (27)$$



Константу интегрирования  $C$  выберем так, чтобы  $\gamma(0) = 0$ , откуда  $C = fL^2 \sin \theta$ . Подставляя в (27) получаем окончательный ответ:

$$\gamma(t) = 2aL^2 \sin \theta \sin^2 \frac{ft}{2}. \quad (28)$$

Поскольку нашей окончательной задачей является описание циркуляции пресных вод Вислинского залива на выходе из Балтийского пролива (соединяющего собственно Вислинский залив с Балтийским морем), нам следует подставить в формулу (28) значения соответствующих параметров  $a$ ,  $L$ ,  $\theta$  и  $f$ . Параметр  $L$  мы выберем, исходя из размера устья Балтийского пролива:  $L \approx 320$  м. Географическая широта  $\theta$  составляет  $\theta = 54^\circ 38'$ , поэтому  $\sin \theta \approx 0.816$ .

Для вычисления параметра  $a$  примем в (13)  $x = 0$  (ему соответствует середина устья пролива) и подставим значение  $v_0 = -0,05 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , наблюдающееся на глубине 4 метров [10]:  $a = \frac{v_0}{L} \approx -0,563 \text{ ч}^{-1}$ .

С учетом этого формула (28) принимает окончательный вид

$$\gamma_1(t) = -9,4 \cdot 10^4 \sin^2 \left( 0,21t \right) \frac{\text{м}^2}{\text{ч}}. \quad (29)$$

Из этой формулы видно, что завихренность потока пресной воды на выходе из Балтийского пролива – величина строго периодическая и достигает  $|\gamma_{\max}| = 9,4 \cdot 10^4$  – максимального абсолютного значения через 7 часов 21 минуту после начала наблюдений. Характерный график поведения функции  $\gamma_1(t)$  представлен на рисунке 2.

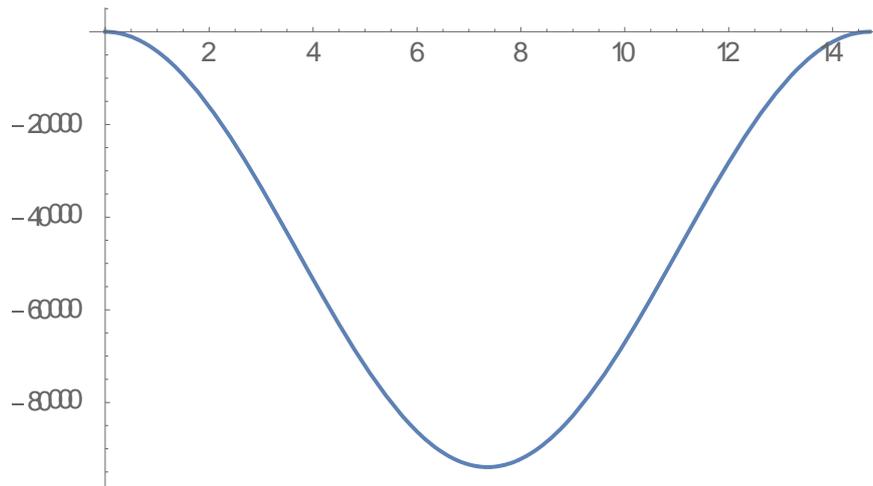


Рис. 2. Зависимость завихренности от времени для линейной модели (13)



**Пример 2.** Квадратичная модель (14). В этом случае

$$x = x_0 + \frac{2a(L^2 - x_0^2)}{f} \sin^2 \frac{ft}{2},$$

$$y = y_0 + \frac{a(L^2 - x_0^2)}{f} \sin ft.$$

Поступим аналогично предыдущему примеру и рассмотрим эволюцию различных частей контура по отдельности.

$x_0 = 0$ ,  $y$  возрастает. Имеем

$$x = \frac{2aL^2}{f} \sin^2 \frac{ft}{2},$$

$$y = y_0 + \frac{aL^2}{f} \sin ft.$$

Очевидно, что как и в примере 1, этот отрезок движется, оставаясь все время параллельным оси  $y$ .

Пусть  $y_0(x_0) = L$ ,  $x$  возрастает. Тогда

$$x = x_0 + \frac{2a(L^2 - x_0^2)}{f} \sin^2 \frac{ft}{2},$$

$$y = L + \frac{a(L^2 - x_0^2)}{f} \sin ft.$$

Откуда

$$x = \pm \sqrt{L^2 - \frac{f(y-L)}{a \sin ft}} + (y-L) \operatorname{tg} \frac{ft}{2}.$$

Отрезок, соответствующий  $x_0 = L$ , неподвижен.

Пусть  $y_0(x_0) = 0$ . Это означает, что

$$x = \pm \sqrt{L^2 - \frac{fy}{a \sin ft}} + y \operatorname{tg} \frac{ft}{2}.$$

Таким образом, окончательное выражение для площади в произвольный момент времени принимает вид

$$S = L^2 \left( 1 - \frac{2aL}{f} \sin^2 \frac{ft}{2} \right),$$

а значит, согласно формуле (11):

$$\gamma(t) = 2aL^3 \sin \theta \sin^2 \frac{ft}{2}. \quad (30)$$



Отметим, что как и в предыдущем примере выражение (30) получено с учетом начального условия  $\gamma(0) = 0$ .

Для приложения формулы (30) к задаче втекания пресной воды из Вислинского залива в Балтийское получим

$$\gamma_2(t) = -294 \cdot \sin^2(0,21t) \frac{\text{м}^2}{\text{ч}}.$$

Сравнив данную формулу с полученной для линейной модели (13), мы приходим к следующему выводу: хотя периодическая зависимость от времени остается неизменной в обеих моделях, изменение формы «злыка» пресных вод приводит к чрезвычайно резкой (более чем в 300 раз!) смене амплитуды колебаний искомой функции. Характерный график поведения функции  $\gamma_2(t)$  представлен на рисунке 3.

Более того, даже изменение контура  $L$  не приводит к столь резкой смене амплитуды, что легко показать на следующем примере.

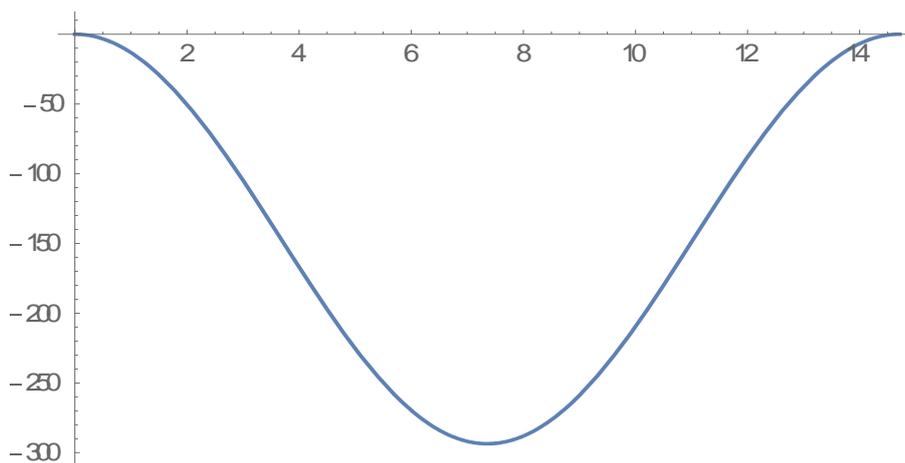


Рис. 3. Зависимость завихренности от времени для квадратичной модели (14)

### Пример 3.

Пусть исходное распределение скорости имеет вид (13), но контур теперь выберем не квадратным, а в виде окружности радиуса  $R$ , причем будем считать, что  $L = 2R$ . В этом случае получаем

$$\left( y(x,t) - R - \frac{a(2R-x)\sin ft}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}} \right)^2 + \left( \frac{fx - 4aR \sin^2 \frac{ft}{2}}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}} - R \right)^2 = R^2. \quad (31)$$

Уравнение (31) определяет динамику первоначально круглого контура через неявно заданную функцию  $y(x, t)$ .



Площадь удобно вычислить следующим образом. Контур (31) ограничен двумя функциями:

$$y_1 = R + \mu \left( 1 - \frac{x}{2R} \right) - \sqrt{R^2 - (\lambda x - v - R)^2},$$

где

$$\mu = \frac{2aR \sin ft}{f - 2a^2 \sin^2 \frac{ft}{2}}, \quad \lambda = \frac{f}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}}, \quad v = \frac{4aR \sin^2 \frac{ft}{2}}{f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2}}.$$

Очевидно, что при  $t=0$  контур будет находиться внутри квадрата. После вычислений, аналогичных сделанным в предыдущих примерах, приходим к выводу, что площадь деформированного контура составляет

$$S(t) = \int_{\frac{4aR \sin^2 \frac{ft}{2}}{2}}^{2R} dx (y_2 - y_1) = 2 \int_{\frac{4aR \sin^2 \frac{ft}{2}}{2}}^{2R} dx \sqrt{R^2 - (\lambda x - v - R)^2}.$$

В результате интегрирования получаем

$$S(t) = \frac{\pi R^2}{f} \left( f - 2a \sin^2 \frac{ft}{2} \right) + c.$$

Выбирая  $c$  по аналогии с предыдущими примерами получаем

$$\gamma_3(t) = 2\pi R^2 a \sin \theta \sin^2 \frac{ft}{2}.$$

Повторив вычисления, сделанные для линейной модели, приходим к следующей формуле:

$$\gamma_3(t) = -7,4 \cdot 10^4 \sin^2(0,21t) \frac{\text{м}^2}{\text{ч}}.$$

Легко видеть, что в линейной модели амплитуды  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  изменений циркуляции по двум различным контурам являются величинами сравнимыми ( $9,4 \cdot 10^4$  и  $7,4 \cdot 10^4$ ), в то время как в квадратичной модели максимальная амплитуда оказывается величиной, составляющей не более 0,4% от амплитуд, демонстрируемых линейной моделью. Данная особенность выглядит особенно наглядно, если отобразить логарифмы модулей всех трех функций  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$  на одном графике, показанном на рисунке 4.

Таким образом, полученные нами формулы могут быть использованы для решения сразу нескольких задач.

Во-первых, это задача восстановления точного вида распределения скоростей в «языке» пресных вод на выходе из Балтийского пролива по известной максимальной величине циркуляции пресной воды в устье пролива. Примечательно, что данный метод не требует проведения сложных экспедиционных работ, а только натурных данных, предоставляемых спутниковыми системами наблюдения типа *LandSat-8*.



Второй важной задачей является контроль вихреобразования при сбросе вод Вислинского залива в Балтийское море. Как известно, одной из важнейших задач экологического мониторинга морей стала локализация антропогенных и биогенных загрязнений морской среды, а также контроль их распространения. Акватория Вислинского залива — один из наиболее эвтрофированных районов Балтийского моря, характеризующихся резкими сезонными колебаниями биомассы фитопланктона (сине-зеленых водорослей, цианобактерий и др.). Эвтрофикация приводит к быстрому истощению ресурса экосистемы акватории, резкому снижению насыщенности ее вод кислородом и пересыщению их мертвой органикой.

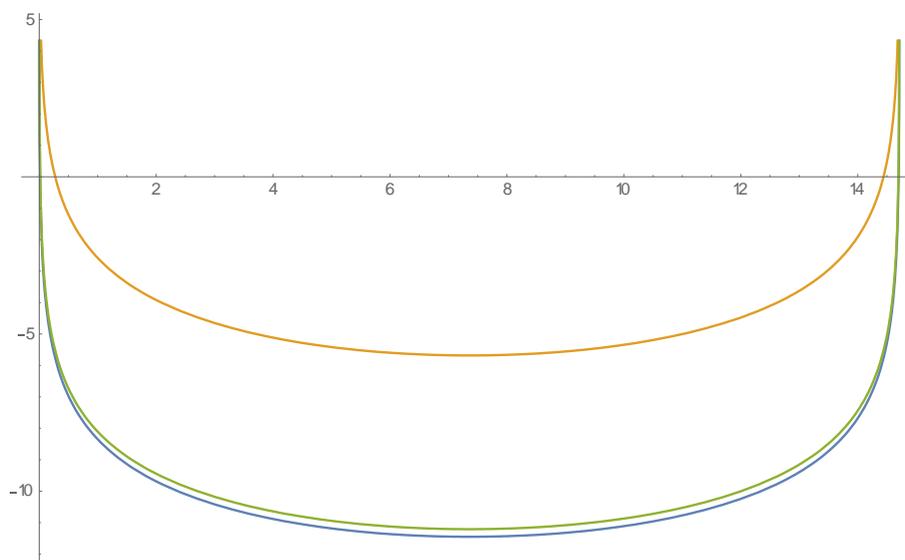


Рис. 4. Графики функций  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$ ,  $\gamma_3(t)$  в логарифмическом масштабе

Ситуация осложняется тем, что акватория Вислинского залива имеет выход в Балтийское море, через который загрязненные биогенными факторами воды распространяются по прибрежным водам большей части Самбийского полуострова [11]. При этом ключевым механизмом столь широкого распространения загрязнения являются вихри, возникающие в устье Балтийского пролива.

Таким образом, проблема контроля за распространением вод Вислинского залива в прибрежной зоне Балтийского моря оказывается непосредственно связанной с задачей уменьшения циркуляции водных масс, в первую очередь в окрестности Балтийского пролива. Как мы видели, эта задача может быть решена путем изменения профиля скоростей течения, проходящего через пролив, для чего существует ряд методов, таких как изменение рельефа дна пролива, установка волнорезов параллельно береговой линии и т. д.



Еще раз подчеркнем, что результатом этих работ должно стать радикальное (более чем на 2 порядка!) изменение картины циркуляции загрязненных водных масс, что, в свою очередь, должно оказать самое благоприятное воздействие на биосистему всего прибалтийского побережья Калининградской области.

#### Список литературы

1. Mahesha A. Steady-State Effect of Freshwater Injection on Seawater Intrusion // J. Irrig. Drain Eng. 1996. №122(3). P. 149–154.
2. Xue Y., Xie Ch., Wu J. et al. A Three-Dimensional Miscible Transport Model For Seawater Intrusion in China // Water Resour. Res. 1995. №31. P. 903–912.
3. Meier M. Modeling the pathways and ages of inflowing salt- and freshwater in the Baltic Sea // Estuar. Coast. Shelf S. 2007. №74. P. 610–627.
4. Gascard J.-C., Watson A., Messias M.-J. et al. Long-lived vortices as a mode of deep ventilation in the Greenland Sea // Nature. 2002. №416. P. 525–527.
5. deCastro M., Gomez-Gesteira M., Alvarez I., Prego R. Negative estuarine circulation in the Ria of Pontevedra (NW Spain) // Estuar. Coast. Shelf S. 2004. №60. P. 301–312.
6. Hinata H., Yanagi T., Takao T., Kawamura H. Wind-induced Kuroshio warm water intrusion into Sagami Bay // J. Geophys. Res. 2005. №110. Issue C03023:1–13.
7. Alvareza I., deCastro M., Gomez-Gesteira M., Prego R. Hydrographic behavior of the Galician Rias Baixas (NW Spain) under the spring intrusion of the Miño River // J Marine Syst. 2006. №60. P. 144–152.
8. Bjerknes V. Über einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres // Kongl. Sven. Vetensk. Akad. Handlingar. 1998. №31. P. 1–35.
9. Ландау Л., Лифшиц Е. Курс теоретической физики. Т. 1: Механика. М., 1988. С. 163–166.
10. Лаврова О., Краюшкин Е., Соловьев Д. и др. Влияние ветрового воздействия и гидродинамических процессов на распространение вод Калининградского залива в акватории Балтийского моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2014. №11. С. 76–99.
11. Kahru M., Elmgren R. Multidecadal time series of satellite-detected accumulations of cyanobacteria in the Baltic Sea // Biogeosciences. 2014. №11. P. 3619–3633.

#### Об авторах

Валериан Артемович Юров — канд. физ.-мат. наук, доц.-исследователь, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.  
E-mail: vayt37@gmail.com

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.  
E-mail: yurov@freemail.ru

#### About the authors

Dr Valerian Yurov — Ass. Prof. and researcher, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.  
E-mail: vayt37@gmail.com

Dr Alla Yurova — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.  
E-mail: yurov@freemail.ru